Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2024, Extraordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

Els sistemes planetaris tendeixen a formar-se en ressonància. Això vol dir que, quan un planeta completa n òrbites, el planeta veí en completa m, en què n i m són nombres enters. El novembre de 2023 la revista Nature publicava el descobriment de sis planetes que orbitaven en ressonància al voltant de l'estrella HD110067.

a) **Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de $54,7$ dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.**

b) **El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4 : 3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és $2,5$ vegades la terrestre.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.
Massa de la Terra, $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ **kg.**
Massa del Sol, $M_S = 1,98 \times 10^{30}$ **kg.**

Solución:

a) **Suposem que aquesta estrella té la massa del Sol i que els planetes tenen òrbites circulars. El sisè planeta, el més exterior, té un període de $54,7$ dies. Calculeu la distància entre el planeta i l'estrella. Representeu l'estrella i el planeta, dibuixeu el vector d'acceleració normal i calculeu-ne el mòdul.**

El sexto planeta tiene un período orbital de $T = 54.7\,\mathrm{d}$. Primero, convertimos el periodo a segundos:

$$T = 54,7 \text{ días} \cdot 24 \,\frac{\mathrm{h}}{\text{día}} \cdot 3600 \,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} = 4\,725\,120 \text{ s}.$$

Usamos la ley de gravitación universal y el movimiento circular uniforme:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r,$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Despejando r:

$$r^3 = \frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}.$$

Dado que la estrella tiene la masa del Sol, $M = M_S = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg, y $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Calculamos r:

$$r^3 = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2) \cdot (1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \cdot (4\,725\,120 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 7,482 \cdot 10^{25} \text{ m}^3.$$

Entonces, la distancia es:

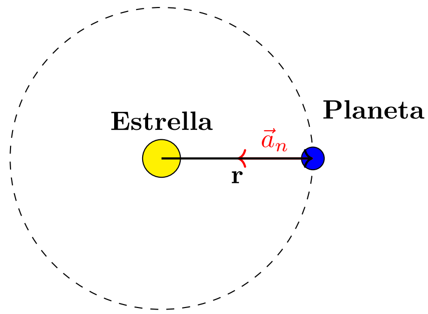
$$r = \sqrt[3]{7,482 \cdot 10^{25}} \text{ m} = 4,23 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

El módulo de la aceleración normal es:

$$a_n = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Calculamos:

$$a_n = \frac{4\pi^2 \cdot (4,23 \cdot 10^{11} \text{ m})}{(4\,725\,120 \text{ s})^2} = 7,48 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$



Por lo tanto, la distancia es $4,23 \cdot 10^8$ km y la aceleración normal del planeta es $a_n = 7,48 \cdot 10^{-2}$ m/s^2.

b) **El cinquè planeta completa 4 òrbites en el mateix temps que el sisè planeta en completa 3 (relació 4 : 3). Calculeu el radi de l'òrbita del cinquè planeta i la seva energia mecànica suposant que la seva massa és 2,5 vegades la terrestre.**

Dado que el quinto planeta completa 4 órbitas en el mismo tiempo que el sexto planeta completa 3, tenemos:

$$4 \cdot T_5 = 3 \cdot T_6 \implies T_5 = \frac{3}{4} \cdot T_6.$$

Entonces:

$$T_5 = \frac{3}{4} \cdot 4\,725\,120 \text{ s} = 3\,543\,840 \text{ s}.$$

Usamos la tercera ley de Kepler:

$$\left(\frac{T_5}{T_6}\right)^2 = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} = \left(\frac{r_5}{r_6}\right)^3.$$

Despejamos r_5:

$$r_5 = r_6 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{1/3} = 4,23 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot 0,825 = 3,49 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

La masa del quinto planeta es:

$$m = 2,5 \cdot M_T = 2,5 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 1,495 \cdot 10^{25} \text{ kg}.$$

La energía mecánica es:

$$E_m = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r_5}.$$

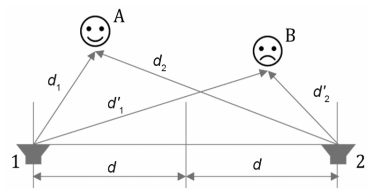
Sustituimos los valores:

$$E_m = -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2) \cdot (1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \cdot (1,495 \cdot 10^{25} \text{ kg})}{2 \cdot 3,49 \cdot 10^{11} \text{ m}} = -2,83 \cdot 10^{33} \text{ J}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita del quinto planeta es $r_5 = 3,49 \cdot 10^{11}$ m y su energía mecánica es $E_m = -2,83 \cdot 10^{33}$ J.

Problema 2. Ondas

Dos altaveus estan separats entre si una distància $2d$ i emeten un senyal harmònic i en fase. Provoquem el so amb un generador de senyals que podem ajustar entre els 200 i els 400 Hz. La persona A està situada a $d_1 = 5,00$ m de l'altaveu 1 i a $d_2 = 8,68$ m de l'altaveu 2. Una segona persona B està situada a $d'_1 = 8,14$ m de l'altaveu 1 i a $d'_2 = 4,00$ m de l'altaveu 2.



a) **Calculeu totes les freqüències que podem escollir en el generador perquè la persona A senti els senyals amb una intensitat màxima. Quina freqüència de les anteriors hem d'escollir perquè la persona A senti el senyal amb intensitat màxima i la persona B no el pugui sentir (és a dir, el senti amb intensitat mínima)?**

b) **Ara emetem música pels dos altaveus amb una potència de $2,36 \times 10^{-3}$ W cadascun. Calculeu la intensitat sonora generada per cada altaveu en la posició de la persona A. Determineu el nivell d'intensitat sonora que percep aquesta persona.**

Nota:
Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.
Dades:
$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.
Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

Solución:

a) **Calculeu totes les freqüències que podem escollir en el generador perquè la persona A senti els senyals amb una intensitat màxima. Quina freqüència de les anteriors hem d'escollir perquè la persona A senti el senyal amb intensitat màxima i la persona B no el pugui sentir (és a dir, el senti amb intensitat mínima)?**

La intensidad será máxima en el punto A cuando haya interferencia constructiva, es decir, cuando la diferencia de caminos sea un múltiplo entero de la longitud de onda:

$$|d_2 - d_1| = n \cdot \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculamos la diferencia de caminos para la persona A:

$$\Delta d_A = |d_2 - d_1| = |8{,}68 \text{ m} - 5{,}00 \text{ m}| = 3{,}68 \text{ m}.$$

Por lo tanto:

$$3{,}68 \text{ m} = n \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3{,}68 \text{ m}}{n}.$$

La frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v \cdot n}{3{,}68 \text{ m}} = n \cdot \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{3{,}68 \text{ m}} = n \cdot 92{,}391 \text{ Hz}.$$

Buscamos los valores de n que dan frecuencias entre 200 Hz y 400 Hz:

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad f = 3 \cdot 92{,}391 \text{ Hz} = 277{,}17 \text{ Hz}.$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad f = 4 \cdot 92{,}391 \text{ Hz} = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Por lo tanto, las frecuencias posibles son:

$$f = 277{,}17 \text{ Hz}, \quad f = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Para que la persona B escuche el sonido con intensidad mínima, debe haber interferencia destructiva en su posición, es decir:

$$|d_2' - d_1'| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculamos la diferencia de caminos para la persona B:

$$\Delta d_B = |d_2' - d_1'| = |4{,}00 \text{ m} - 8{,}14 \text{ m}| = 4{,}14 \text{ m}.$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta d_B}{2n+1} = \frac{4{,}14 \text{ m}}{n + \frac{1}{2}}.$$

La frecuencia correspondiente es:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4{,}14 \text{ m}}{n + \frac{1}{2}}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{4{,}14 \text{ m}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz}.$$

Buscamos los valores de n que dan frecuencias entre $200\,\text{Hz}$ y $400\,\text{Hz}$:

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad f = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 205{,}31 \text{ Hz}.$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad f = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 287{,}44 \text{ Hz}.$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad f = \left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot 82{,}125 \text{ Hz} = 369{,}56 \text{ Hz}.$$

Observamos que la frecuencia $f = 369{,}56$ Hz cumple ambas condiciones.

Por lo tanto, las frecuencias que podemos escoger son $f = 277{,}17$ Hz y $f = 369{,}56$ Hz, y debemos escoger $f = 369{,}56$ Hz para que la persona A escuche el señal con intensidad máxima y la persona B con intensidad mínima.

b) Ara emetem música pels dos altaveus amb una potència de $2,36 \times 10^{-3}$ W cadascun. Calculeu la intensitat sonora generada per cada altaveu en la posició de la persona A. Determineu el nivell d'intensitat sonora que percep aquesta persona.

La intensidad sonora generada por cada altavoz en la posición de la persona A es:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi d_1^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi(5{,}00 \text{ m})^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi \cdot 25{,}00 \text{ m}^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{314{,}16 \text{ m}^2} = 7{,}51 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2,$$

$$I_2 = \frac{P}{4\pi d_2^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi(8{,}68 \text{ m})^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi \cdot 75{,}38 \text{ m}^2} = \frac{2{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{942{,}48 \text{ m}^2} = 2{,}50 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

La intensidad total es la suma de las intensidades:

$$I = I_1 + I_2 = 7{,}51 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2} + 2{,}50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2} = 1{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora percibido es:

$$L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}}{1{,}00 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 10 \cdot \log_{10}(1{,}00 \cdot 10^{7}) = 70\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora generada por cada altavoz en la posición de la persona A es $\boldsymbol{I_1 = 7{,}51 \cdot 10^{-6}}$ W/m^2 y $\boldsymbol{I_2 = 2{,}50 \cdot 10^{-6}}$ W/m^2, y el nivel de intensidad sonora percibido es $\boldsymbol{L = 70}$ dB.

Problema 3. Campo Electromagnético

El Fun-Fly-Stick és un enginyós generador d'electricitat estàtica que funciona amb piles i que permet fer levitar objectes metàl·lics lleugers. Quan es prem el botó es genera una càrrega estàtica negativa a la vareta. Tocant l'objecte amb la vareta, part d'aquesta càrrega es transfereix a l'objecte de manera que tots dos queden carregats i l'objecte levita per sobre de la vareta. (En fer els càlculs, considereu la vareta i l'objecte metàl·lic com si fossin càrregues puntuals.)

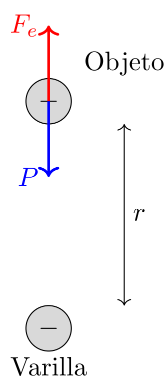
a) **Suposem que, després de tocar l'objecte, la vareta i l'objecte metàl·lic tenen la mateixa càrrega. Feu un dibuix de la situació de la vareta i l'objecte metàl·lic levitant i dibuixeu les forces sobre l'objecte. Calculeu quina és la càrrega electroestàtica de l'objecte metàl·lic si aquest té una massa de 10 g i es troba a una distància de 55 cm de la vareta.**

b) **Considereu ara una altra situació, en què tant la vareta com l'objecte metàl·lic estan carregats amb una càrrega $q = -2\ \mu$C i separats a una distància de 60 cm. Calculeu el mòdul del camp elèctric al punt central de la línia que els uneix i el potencial elèctric en aquest punt. Determineu quin és el treball que haurà de fer una força externa per a portar un electró des de l'infinit fins a aquest punt central.**

Dades:
Gravetat a la superfície de la Terra, $g = 9,8$ m/s^2.
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C.
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ Nm^2 C^{-2}.

Solución:

a) **Suposem que, després de tocar l'objecte, la vareta i l'objecte metàl·lic tenen la mateixa càrrega. Feu un dibuix de la situació de la vareta i l'objecte metàl·lic levitant i dibuixeu les forces sobre l'objecte. Calculeu quina és la càrrega electroestàtica de l'objecte metàl·lic si aquest té una massa de 10 g i es troba a una distància de 55 cm de la vareta.**



La varilla y el objeto metálico están separados una distancia $r = 55\,\text{cm}$ y ambos tienen carga negativa, por lo que se repelen. Sobre el objeto actúan dos fuerzas:

- *Fuerza eléctrica repulsiva (F_e)* hacia arriba.
- *Peso ($P = m \cdot g$)* hacia abajo.

Como el objeto levita en equilibrio, la suma de fuerzas es cero:

$$F_e - P = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e = P.$$

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales iguales es:

$$F_e = k \cdot \frac{Q^2}{r^2},$$

donde Q es la carga de la varilla y del objeto ($Q = q_{\text{var}} = q_{\text{obj}}$) y r es la distancia entre las cargas. Igualando la fuerza eléctrica al peso:

$$k \cdot \frac{Q^2}{r^2} = m \cdot g.$$

Despejando Q:

$$Q^2 = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{k} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r^2}{k}}.$$

Sustituimos los valores dados (asegurándonos de usar unidades SI):
- $m = 10\,\text{g} = 0.01\,\text{kg}$.
- $g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.
- $r = 55\,\text{cm} = 0.55\,\text{m}$.
- $k = 8.99 \times 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2}$.

Calculamos el numerador:

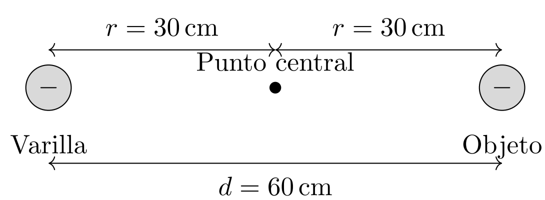
$$m \cdot g \cdot r^2 = 0,01 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m}\,\text{s}^{-2} \cdot (0,55 \text{ m})^2 = 0,01 \cdot 9,8 \cdot 0,3025 \text{ kgm}^3/\text{s}^2 = 0,029645 \text{ Nm}^2.$$

Entonces,

$$Q = \sqrt{\frac{0,029645 \text{ Nm}^2}{8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2}}} = 1,816 \text{ µC}.$$

Por lo tanto, la carga electrostática del objeto metálico es $\boldsymbol{Q = 1,816}$ µC.

b) Considereu ara una altra situació, en què tant la vareta com l'objecte metàl·lic estan carregats amb una càrrega $\boldsymbol{q = -2\ \mu}$C i separats a una distància de 60 cm. Calculeu el mòdul del camp elèctric al punt central de la línia que els uneix i el potencial elèctric en aquest punt. Determineu quin és el treball que haurà de fer una força externa per a portar un electró des de l'infinit fins a aquest punt central.



Las dos cargas son iguales y negativas:

$$q_{\text{var}} = q_{\text{obj}} = -2 \text{ µC} = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

La distancia entre las cargas es $d = 60\,\text{cm} = 0.60\,\text{m}$. El punto central está a una distancia $r = \dfrac{d}{2} = 0.30\,\text{m}$ de cada carga. El campo eléctrico debido a una carga puntual es:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r}.$$

Para una carga negativa, el campo eléctrico apunta hacia la carga. En el punto central, los campos eléctricos producidos por las dos cargas tienen el mismo módulo pero direcciones opuestas. Por lo tanto, se cancelan entre sí:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{obj}} + E_{\text{var}} = 0.$$

El potencial eléctrico debido a una carga puntual es:

$$V = k \cdot \frac{q}{r}.$$

El potencial es una magnitud escalar, por lo que se suman algebraicamente los potenciales de ambas cargas:

$$V_{\text{total}} = V_{\text{obj}} + V_{\text{var}} = k \cdot \frac{q_{\text{obj}}}{r} + k \cdot \frac{q_{\text{var}}}{r} = 2k \cdot \frac{q}{r}.$$

Sustituyendo los valores:

$$V_{\text{total}} = 2 \cdot \left(8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}\right) \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0,30 \text{ m}} = -119\,866,6 \text{ V}.$$

El trabajo necesario para mover una carga desde el infinito hasta el punto central es igual a la variación de energía potencial eléctrica:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_p = q_{\text{e}} \cdot \Delta V,$$

donde q_{e} es la carga del electrón:

$$q_{\text{e}} = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Dado que el potencial en el infinito es cero ($V_\infty = 0$), entonces:

$$W_{\text{ext}} = q_{\text{e}} \cdot (V_{\text{final}} - V_\infty) = q_{\text{e}} \cdot V_{\text{final}}.$$

Sustituyendo:

$$W_{\text{ext}} = \left(-1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}\right) \cdot \left(-1,19866 \cdot 10^5 \text{ V}\right) = 1,920 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en el punto central es cero, el potencial eléctrico en el punto central es $V = -1,19866 \cdot 10^5$ V y el trabajo que debe realizar una fuerza externa es $W_{\text{ext}} = 1,920 \cdot 10^{-14}$ J.

Problema 4. Campo Electromagnético

L'experiment d'Oersted fet el 1820 (figura 1) consisteix en un fil conductor paral·lel a la component horitzontal del camp magnètic terrestre per on passa un corrent elèctric i una agulla magnètica just a sobre o a sota del fil. Oersted observà que l'orientació de l'agulla canviava si el fil connectat estava situat a sobre o a sota de l'agulla.

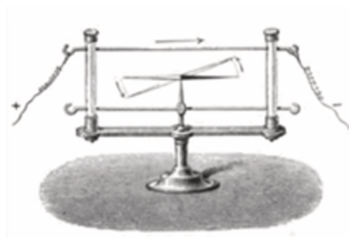


Figura 1. Experiment d'Oersted.

En la figura 2 no sabem si el fil conductor està situat per sobre o per sota de la brúixola.

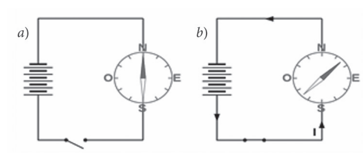


Figura 2. *a*) Circuit obert. *b*) Circuit tancat.

a) **Representeu sobre l'agulla de la brúixola del dibuix b de la figura 2 els vectors del camp magnètic terrestre (B_{Terra}) i del camp magnètic generat pel fil (B_{fil}). Argumenteu si la brúixola del dibuix b de la figura 2 està situada a sobre o a sota del fil conductor en aquest cas.**

b) **En aquest muntatge experimental, la separació entre la brúixola i el fil és de 10 cm. Observem que l'agulla de la brúixola forma un angle de 45° amb la direcció del corrent elèctric quan circulen 20 A pel fil conductor. Calculeu la component horitzontal del camp magnètic terrestre (B_{Terra}).**

Dades:

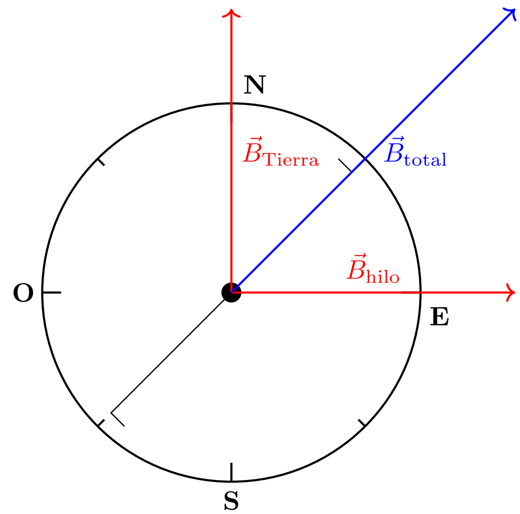
El mòdul del camp magnètic creat per un fil infinit per on circula un corrent I a una distància r del fil és $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A.

Solución:

a) **Representeu sobre l'agulla de la brúixola del dibuix b de la figura 2 els vectors del camp magnètic terrestre (B_{Terra}) i del camp magnètic generat pel fil (B_{fil}). Argumenteu si la brúixola del dibuix b de la figura 2 està situada a sobre o a sota del fil conductor en aquest cas.**

En la figura, el campo magnético terrestre $\vec{B}_{\text{Tierra}}$ está dirigido hacia la arriba (de sur a norte geográfico), y el campo magnético generado por el hilo $\vec{B}_{\text{hilo}}$ está dirigido hacia la derecha.



Para determinar la posición del hilo, aplicamos la regla de la mano derecha para un hilo conductor rectilíneo:

- Si el hilo está atravesado por una corriente hacia dentro del plano (entrando), el campo magnético circular a su alrededor tiene sentido horario.
- Si la corriente sale del plano (saliendo), el campo magnético tiene sentido antihorario.

Dado que el campo magnético $\vec{B}_{\text{hilo}}$ en la posición de la brújula está dirigido hacia la derecha, esto indica que el hilo está situado *debajo* de la brújula.

Por lo tanto, la brújula está situada encima del hilo conductor.

b) En aquest muntatge experimental, la separació entre la brúixola i el fil és de 10 cm. Observem que l'agulla de la brúixola forma un angle de 45° amb la direcció del corrent elèctric quan circulen 20 A pel fil conductor. Calculeu la component horitzontal del camp magnètic terrestre (B_{Tierra}).

La aguja de la brújula se alinea con el campo magnético resultante de la suma vectorial del campo magnético terrestre $\vec{B}_{\text{Tierra}}$ y el campo magnético generado por el hilo $\vec{B}_{\text{hilo}}$. Dado que la aguja forma un ángulo de 45°, los módulos de los dos campos son iguales:

$$\tan 45^\circ = \frac{B_{\text{hilo}}}{B_{\text{Tierra}}} \quad \Rightarrow \quad B_{\text{hilo}} = B_{\text{Tierra}}.$$

Calculamos B_{hilo} usando la fórmula del campo magnético creado por un hilo recto:

$$B_{\text{hilo}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1}$, $I = 20$ A y $r = 10$ cm $= 0,10$ m. Sustituimos:

$$B_{\text{hilo}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m A}^{-1} \cdot 20\ \text{A}}{2\pi \cdot 0,10\ \text{m}} = 4,0 \cdot 10^{-5}\ \text{T} = 40\ \mu\text{T}.$$

Como $B_{\text{Tierra}} = B_{\text{hilo}}$, entonces:

$$B_{\text{Tierra}} = 40\ \mu\text{T}.$$

Por lo tanto, la componente horizontal del campo magnético terrestre es $B_{\text{Tierra}} = 80\ \mu\text{T}$.

Problema 5. Óptica

Un ull hipermetrop no és capaç d'enfocar objectes propers a la retina, sinó que els enfoca darrere d'aquesta, i per això els veu borrosos. L'Anna no és capaç d'enfocar bé els objectes que són més a prop de 70 cm i necessita unes ulleres amb lents convergents per a llegir.

a) **L'Anna normalment situa el llibre a 35 cm i la imatge creada per la lent ha de ser a 70 cm perquè la pugui enfocar correctament. Calculeu la distància focal de la lent correctora i la seva potència.**

b) **Calculeu on es formarà la imatge d'un objecte de 10 cm d'alçària situat a 25 cm davant d'una lent convergent de 20 cm de distància focal. Calculeu, també, la mida de la imatge i esmenteu les seves característiques (més gran o més petita, real o virtual, dreta o invertida). Dibuixeu a la quadrícula de sota el diagrama de raigs amb la lent, l'objecte i la imatge.**

Solución:

a) **L'Anna normalment situa el llibre a 35 cm i la imatge creada per la lent ha de ser a 70 cm perquè la pugui enfocar correctament. Calculeu la distància focal de la lent correctora i la seva potència.**

Utilizamos la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Según el criterio de signos (convención DIN):
- La distancia del objeto es negativa: $s = -35$ cm.
- La distancia de la imagen es negativa (imagen virtual): $s' = -70$ cm.

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{-70\text{ cm}} - \frac{1}{-35\text{ cm}} = -\frac{1}{70\text{ cm}} + \frac{1}{35\text{ cm}} = \frac{1}{70\text{ cm}}.$$

Por lo tanto, la distancia focal es:

$$f' = 70\text{ cm}.$$

Calculamos la potencia de la lente (en dioptrías), recordando que f' debe estar en metros:

$$f' = 0,70\text{ m} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,70\text{ m}} = 1,43\text{ dioptrías}.$$

Por lo tanto, la distancia focal de la lente correctora es $\boldsymbol{f' = 70}$ cm y su potencia es $\boldsymbol{P = 1,43}$ dioptrías.

b) **Calculeu on es formarà la imatge d'un objecte de 10 cm d'alçària situat a 25 cm davant d'una lent convergent de 20 cm de distància focal. Calculeu, també, la mida de la imatge i esmenteu les seves característiques (més gran o més petita, real o virtual, dreta o invertida). Dibuixeu a la quadrícula de sota el diagrama de raigs amb la lent, l'objecte i la imatge.**

Los datos del problema son:
- Altura del objeto: $y = 10$ cm.
- Distancia del objeto: $s = -25$ cm.
- Distancia focal de la lente: $f' = +20$ cm (lente convergente).

Aplicamos la ecuación de la lente delgada:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{-25 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{25 \text{ cm}}.$$

Calculamos:

$$\frac{1}{s'} = \frac{5}{100 \text{ cm}} - \frac{4}{100 \text{ cm}} = \frac{1}{100 \text{ cm}}.$$

Entonces,

$$s' = +100 \text{ cm}.$$

La imagen se forma a $100\,\text{cm}$ detrás de la lente. Calculamos el aumento lateral (m):

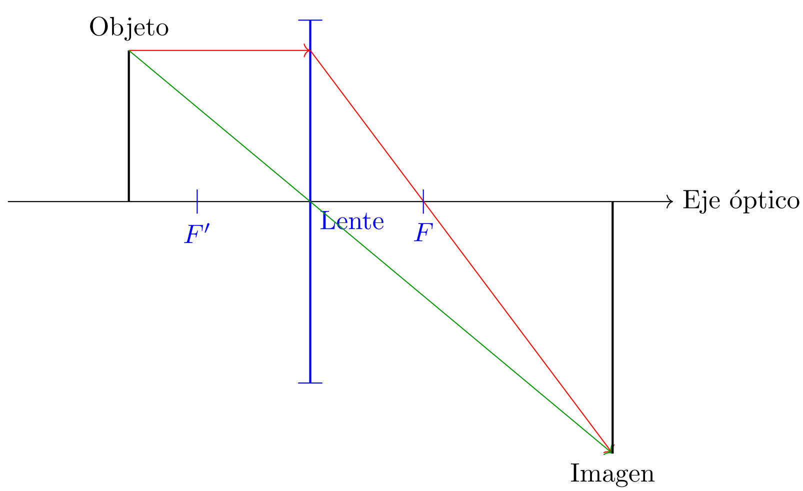
$$m = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{+100 \text{ cm}}{-25 \text{ cm}} = -4.$$

Así, la altura de la imagen es:

$$y' = m \cdot y = (-4) \cdot 10 \text{ cm} = -40 \text{ cm}.$$

Características de la imagen:
- *Más grande* que el objeto ($|m| > 1$).
- *Real* (s' positiva).
- *Invertida* (y' negativa).

El diagrama de rayos es:



Por lo tanto, la imagen se forma a $100\,\text{cm}$ detrás de la lente, es de mayor tamaño, real e invertida.

Problema 6. Física Moderna

Al jaciment neolític de la Draga (Banyoles) s'utilitza el mètode del carboni-14 (^{14}C) per a la datació de restes. El ^{14}C és un isòtop radioactiu que es produeix a l'atmosfera de manera continuada quan neutrons provinents dels raigs còsmics xoquen amb els nuclis de nitrogen (^{14}N). Els éssers vius l'incorporen a l'organisme mentre interactuem amb l'atmosfera, però, a partir del moment de la mort, el ^{14}C comença a desintegrar-se novament en ^{14}N, amb un període de semidesintegració de 5 730 anys. La datació d'una mostra d'os d'animal del sector D de la Draga és de 6 010 anys.

a) **Escriviu la reacció nuclear que correspon al decaïment del ^{14}C a ^{14}N, incloent-hi els antineutrins. Justifiqueu de quin tipus de reacció nuclear es tracta. A partir de l'equació de la desintegració, determineu la relació entre la constant de desintegració λ i el període de semidesintegració.**

b) **Calculeu la constant de desintegració λ del ^{14}C. Determineu quin percentatge de ^{14}C encara roman a la mostra d'os del sector D respecte al ^{14}C que hi havia quan l'organisme estava viu. Calculeu l'activitat de l'os en el moment de morir l'animal si actualment l'activitat de l'os és de $3,63$ Bq.**

Dades:
El nombre atòmic del carboni és $Z = 6$.
El nombre atòmic del nitrogen és $Z = 7$.

Solución:

a) **Escriviu la reacció nuclear que correspon al decaïment del ^{14}C a ^{14}N, incloent-hi els antineutrins. Justifiqueu de quin tipus de reacció nuclear es tracta. A partir de l'equació de la desintegració, determineu la relació entre la constant de desintegració λ i el període de semidesintegració.**

La reacción nuclear es:

$$^{14}_{6}\mathrm{C}| \rightarrow \ ^{14}_{7}\mathrm{N}| + \ ^{0}_{-1}e \ + \ ^{0}_{0}\overline{\nu}_e,$$

donde:

- Se conserva el número de nucleones: $14 = 14 + 0 + 0$.
- Se conserva la carga eléctrica: $6 = 7 + (-1) + 0$.

Se incluye el antineutrino electrónico $\overline{\nu}_e$ para conservar el número leptónico. Este tipo de desintegración es una *desintegración beta negativa* (β^-) porque se emite un electrón. La ecuación de desintegración radiactiva es:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

El período de semidesintegración $t_{1/2}$ es el tiempo en el cual la cantidad de núcleos radiactivos se reduce a la mitad:

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de desintegración:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Dividimos ambos lados por N_0:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2}.$$

Sabemos que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, entonces:

$$-\ln 2 = -\lambda t_{1/2} \implies \lambda t_{1/2} = \ln 2.$$

Por lo tanto, la relación entre la constante de desintegración y el período de semidesintegración es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

Por lo tanto, la reacción nueclear es desintegración beta negativa y $\boldsymbol{\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}}$.

b) **Calculeu la constant de desintegració $\boldsymbol{\lambda}$ del ^{14}C. Determineu quin percentatge de ^{14}C encara roman a la mostra d'os del sector D respecte al ^{14}C que hi havia quan l'organisme estava viu. Calculeu l'activitat de l'os en el moment de morir l'animal si actualment l'activitat de l'os és de $\boldsymbol{3,63}$ Bq.**

Calculamos la constante de desintegración usando la relación encontrada:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} = \frac{0{,}6931}{5730 \text{ años}} = 1{,}2097 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}.$$

También podemos expresarla en segundos:

$$1 \text{ año} = 365{,}25 \text{ días} \cdot 24 \ \frac{\text{h}}{\text{día}} \cdot 3600 \ \frac{\text{s}}{\text{h}} = 31\,557\,600 \text{ s} \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{1{,}2097 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}}{31\,557\,600 \text{ s/año}} = 3{,}833 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}.$$

Para determinar el porcentaje de ^{14}C que aún permanece después de $t = 6010$ años, usamos la ecuación de desintegración:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-1{,}2097 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1} \cdot 6010 \text{ años}} = e^{-0{,}7279} = 0{,}483.$$

Por lo tanto, el porcentaje restante es:

$$\frac{N}{N_0} \cdot 100\% = 48{,}3\%.$$

La actividad radiactiva está dada por:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Despejamos A_0:

$$A_0 = A(t) \cdot e^{\lambda t}.$$

Sustituimos los valores:

$$A_0 = 3{,}63 \text{ Bq} \cdot e^{1{,}2097 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1} \cdot 6010 \text{ años}} = 3{,}63 \text{ Bq} \cdot e^{0{,}7279} = 3{,}63 \text{ Bq} \cdot 2{,}070 = 7{,}51 \text{ Bq}.$$

Por lo tanto, la constante de desintegración es $\boldsymbol{3{,}833 \cdot 10^{-12}}$ s^{-1}, el porcentaje de ^{14}C que aún permanece después de 6010 años es el 48,3% y la actividad inicial del hueso era 7,51 Bq.

Problema 7. Ondas

Una massa de 100 g es fa oscil·lar penjada d'una molla. S'observa que fa 40 oscil·lacions en un minut i que la diferència entre la posició més alta i la més baixa és de 15 cm.

a) **Determineu el període, la constant de la molla i l'equació del moviment si comenceu a comptar el moviment quan passa per la posició més baixa. Representeu a la quadrícula de sota la força elàstica durant dos períodes sencers.**
b) **Calculeu l'energia mecànica de l'oscil·lator harmònic i trobeu l'expressió de l'energia cinètica en funció de la posició de la massa. Calculeu el mòdul de la velocitat quan la massa és 3 cm per sobre de la posició d'equilibri.**

Solución:

a) **Determineu el període, la constant de la molla i l'equació del moviment si comenceu a comptar el moviment quan passa per la posició més baixa. Representeu a la quadrícula de sota la força elàstica durant dos períodes sencers.**

Primero, calculamos la frecuencia de oscilación:

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{tiempo}} = \frac{40 \text{ oscilaciones}}{60 \text{ s}} = 0{,}667 \text{ Hz}.$$

El período es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}667 \text{ Hz}} = 1{,}5 \text{ s}.$$

La constante del muelle se relaciona con la frecuencia angular del movimiento armónico simple:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi f)^2.$$

Calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}667 \text{ Hz} = 4{,}19 \text{ rad/s}.$$

Entonces:

$$k = 0{,}1 \text{ kg} \cdot (4{,}19 \text{ rad/s})^2 = 0{,}1 \text{ kg} \cdot 17{,}54 \text{ rad}^2/\text{s}^2 = 1{,}75 \text{ N/m}.$$

La diferencia entre la posición más alta y más baja es $2A = 15$ cm, por lo que la amplitud es:

$$A = \frac{15 \text{ cm}}{2} = 7{,}5 \text{ cm} = 0{,}075 \text{ m}.$$

Como comenzamos a contar el movimiento cuando pasa por la posición más baja ($t = 0$, $y = -A$), la ecuación del movimiento es:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$

En $t = 0$, tenemos:

$$y(0) = -A = A \cdot \sin(\varphi_0) \implies \sin(\varphi_0) = -1.$$

Por lo tanto, el ángulo inicial es:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{o} \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}.$$

Podemos escribir la ecuación del movimiento:

$$y(t) = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -A \cdot \cos(\omega t).$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$y(t) = -0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19 \text{ rad/s} \cdot t).$$

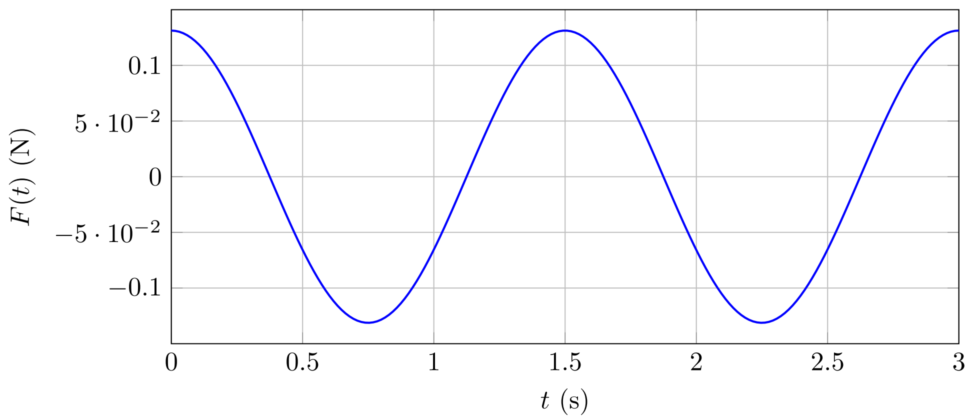
La fuerza elástica es:

$$F(t) = -k \cdot y(t).$$

Sustituyendo:

$$F(t) = -1{,}75 \text{ N/m} \cdot [-0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19\ t)] = 0{,}13125 \text{ N} \cdot \cos(4{,}19\ t).$$

Representación de la fuerza elástica durante dos períodos completos:



Por lo tanto, el periodo es 0,075 m, la constante del muelle es 1,75 N/m y la ecuación del movimiento es

$$\boldsymbol{y(t) = -0{,}075 \text{ m} \cdot \cos(4{,}19 \text{ rad/s} \cdot t).}$$

b) Calculeu l'energia mecànica de l'oscil·lator harmònic i trobeu l'expressió de l'energia cinètica en funció de la posició de la massa. Calculeu el mòdul de la velocitat quan la massa és 3 cm per sobre de la posició d'equilibri.

La energía mecánica total del oscilador armónico es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}75 \text{ N/m} \cdot (0{,}075 \text{ m})^2 = 4{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

La energía cinética en función de la posición y se puede obtener restando la energía potencial elástica de la energía mecánica:

$$E_c = E_m - E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2).$$

Sustituyendo los valores:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 1{,}75 \text{ N/m} \cdot \left((0{,}075 \text{ m})^2 - y^2\right) = 0{,}875 \text{ N/m} \cdot \left(0{,}005625 \text{ m}^2 - y^2\right) = 4{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ J} - 0{,}875 \text{ N/m} \cdot y^2.$$

Para $y = +3$ cm $= +0{,}03$ m, calculamos la energía cinética:

$$E_c = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 0{,}875\ \text{N/m} \cdot (0{,}03\ \text{m})^2 = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 0{,}875 \cdot 9 \cdot 10^{-4}\ \text{J},$$

$$E_c = 4{,}92 \cdot 10^{-3}\ \text{J} - 7{,}88 \cdot 10^{-4}\ \text{J} = 4{,}13 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

La velocidad se obtiene de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \implies v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}},$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}13 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{0{,}1\ \text{kg}}} = \sqrt{0{,}0826\ \text{m}^2/\text{s}^2} = \pm 0{,}288\ \text{m/s}.$$

Por lo tanto, el módulo de la velocidad es $v = 0{,}288$ m/s cuando la masa está 3 cm por encima de la posición de equilibrio.